

Министерство образования Российской Федерации
Ростовский государственный университет

Землянов А. П.: Мальцев Ю. Ф, Кузнецов В. Г.,
Положенцев Е. В., Саченко В. П.

Методические указания к курсу "Механика" для
студентов дневного и вечернего отделений физического
факультета РГУ

Динамика и кинематика в неинерциальных системах отсчета

Примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения

Ростов-на-Дону

2002

Министерство образования Российской Федерации
Ростовский государственный университет

Землянов А. П.: Мальцев Ю. Ф, Кузнецов В. Г.,
Положенцев Е. В., Саченко В. П.

Методические указания к курсу "Механика" для
студентов дневного и вечернего отделений физического
факультета РГУ

Неинерциальные системы отсчета

Примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения

Ростов-на-Дону

2002

Печатается по решению кафедры общей физики физического факультета РГУ (протокол № ____ от 2002 г.)

Авторы: Землянов А. П., доцент КОФ

Кузнецов В. Г., доцент КОФ

Мальцев Ю. Ф., доцент КОФ

Положенцев Е. В., ст. преп. КТВФ

Саченко В. П., профессор, зав. КТВФ

Содержание.

Содержание.....	- 3 -
1. Особенности инерциальных и неинерциальных систем отсчета.....	- 4 -
2. Кинематика и динамика в неинерциальных системах отсчета и силы инерции.....	- 6 -
3. Свойства сил инерции.....	- 8 -
4. Примеры решения задач динамики в неинерциальных системах отсчета.....	- 9 -
5. Задачи для самостоятельного решения.....	- 17 -
6.1. Движение тел в неинерциальной системе, связанной с Землей. Примеры решения задач.....	- 23 -
6.2. Задачи для самостоятельного решения.....	- 33 -
7. Принцип эквивалентности.....	- 39 -
7.1. Примеры решения задач с использованием принципа эквивалентности.....	- 41 -
7.2. Задачи для самостоятельного решения.....	- 45 -
8. Колебания в неинерциальных системах отсчета.....	- 50 -
8.1. Примеры решения задач на малые колебания в неинерциальных системах отсчета.....	- 50 -
8.2. Задачи для самостоятельного решения.....	- 55 -
Список литературы.....	- 57 -

Настоящее пособие предназначено для обучения студентов методам решения задач динамики в неинерциальных системах отсчета.

Любую задачу динамики можно решить в инерциальной и неинерциальной системах отсчета. Вывод систем отсчета определяется в основном стремлением получить решение возможно более простым путем. Опыт показывает, что часто наиболее удобным является использование неинерциальных систем отсчета.

Для решения задач необходимо ознакомиться с теорией, изложенной во всех стандартных учебниках университетского курса общей физики, список которых приведен в разделе "Рекомендуемая литература". Задачи, представленные в настоящем пособии, взяты из задачников, приведенных в списке литературы, а также имеются оригинальные задачи.

1. Особенности инерциальных и неинерциальных систем отсчета.

Понятие системы отсчета является фундаментальным в физике, т. к. пространственно-временное описание движения возможно, если выбраны определенные системы отсчета. В физике различают инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Под инерциальной системой отсчета понимают систему отсчета, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно. Такой системой отсчета является, например, гелиоцентрическая система отсчета или система Коперника. Начало координат этой системы помещено в центре Солнца (лучше сказать в центре масс солнечной системы), а координатные оси являются прямыми, направленными на три удаленные звезды и не лежащими в одной плоскости. Любая другая система отсчета, движущаяся без ускорения относительно системы Коперника, будет также инерциальной. Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчета, являются неинерциальными. Следует отметить, что инерциальность или неинерциальность той или иной системы отсчета можно определить только экспериментальным путем. Например, система отсчета, в которой Земля принимается неподвижной, не является инерциальной. Это обстоятельство подтверждается прямыми опытами

(например, маятник Фуко). В тоже время "степень неинерциальности" системы отсчета, связанной с Землей, мала и во многих задачах можно считать эту систему инерциальной.

Для кинематических задач все системы отсчета эквивалентны и выбор системы отсчета не является существенным. При выборе системы отсчета руководствуются соображениями удобства описания и получения более простых систем уравнений.

В динамике же выбор системы отсчета является вопросом принципиальным. В инерциальной системе отсчета для описания состояния движения тела в уравнении второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Под $\vec{F}$ понимают равнодействующую всех внешних сил, т. е. только тех сил, которые вызваны другими телами, вступившими во взаимодействие с рассматриваемым телом (по принципу: есть сила — есть тело, со стороны которого действует эта сила, нет взаимодействующих тел — нет и сил).

В неинерциальных системах отсчета для описания состояния движения тела в уравнении второго закона Ньютона необходимо ввести силы инерции, которые по отношению к данному телу или системе тел являются внешними. Тогда основное уравнение динамики в неинерциальной системе примет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}. \quad (1)$$

Здесь $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил взаимодействия, а $\vec{F}_{ин}$ — векторная сумма сил инерции, $\vec{a}'$ — ускорение тела в неинерциальной системе.

Силы инерции зависят от характера движения неинерциальной системы. Для их расчета необходимо знать, как движется неинерциальная система относительно любой инерциальной системы, т. е. ее кинематические параметры.

2. Кинематика и динамика в неинерциальных системах отсчета и силы инерции.

Рассмотрим две системы отсчета: K — инерциальную систему и K' — неинерциальную. Пусть известна масса частицы, равнодействующая сил $\vec{F}$, действующих на нее со стороны окружающих тел. Рассмотрим случай, когда K' — система вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, перемещающейся поступательно с ускорением $\vec{a}_0$ относительно системы K . Тогда формула преобразования ускорения при переходе от K -системы к K' -системе будет иметь вид:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2[\vec{\omega} \vec{V}'] - \omega^2 \vec{\rho}. \quad (3)$$

Этому уравнению можно придать следующий вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{a}_{отн} = \vec{a}'$ — ускорение точки в K' -системе. Слагаемое $\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega} \vec{V}']$ называется кориолисовым ускорением и зависит как от скорости относительного движения $\vec{V}'$, т. е. скорости движения точки в K' -системе, так и от угловой скорости вращения K' -системы, т. е. от переносного движения. Последние слагаемые $\vec{a}_{пер} = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{\rho}$ — переносное ускорение. Оно также определяется только свойством движения K' -системы. А именно, $\vec{a}_0 = \frac{d\vec{V}_0}{dt}$ — переносное ускорение, вызванное поступательным ускоренным движением K' -системы. Слагаемое $\omega^2 \vec{\rho} = \vec{a}_ц$ — есть центростремительное ускорение, направленное к мгновенной оси

вращения, а $\vec{\rho}$ — радиус вектор, перпендикулярный оси вращения и характеризующий положение точки относительно этой оси. Иногда это ускорение называют осестремительным. Его не следует путать с нормальным ускорением.

Равенство (4) вместе с выражениями для отдельных слагаемых, стоящих в его правой части, является математической формой теоремы Кориолиса: абсолютное ускорение (т. е. ускорение в K -системе) является векторной суммой относительного, кориолисова и переносного движений.

Из равенства (3) получим ускорение точки в неинерциальной системе (K')

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{\rho} + 2[\vec{V}' \vec{\omega}]. \quad (5)$$

Умножим правую и левую части равенства на массу частицы m и, учитывая, что в K -системе $m\vec{a} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ — силы, обусловленные взаимодействием точки с другими телами, получим:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{\rho} + 2m[\vec{V}' \vec{\omega}]. \quad (6)$$

Это есть основное уравнение динамики точки в неинерциальной системе отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, перемещающейся поступательно с ускорением $\vec{a}_0$.

Из уравнения (6) видно, что даже при отсутствии взаимодействия с другими частицами, т. е. при $\vec{F} = 0$, точка будет двигаться в неинерциальной системе K' с ускорением, отличным от нуля так, как если бы на нее действовали некоторые силы, соответствующие последним трем слагаемым уравнения (6). Эти силы и называются силами инерции. Отметим, что они приложены к центру масс частицы. Введение сил инерции позволяет сохранить по форме основное уравнение динамики для неинерциальных систем: слева — произведение массы частицы на ее ускорение в неинерциальной

системе, справа — кроме силы взаимодействия, обусловленной действием окружающих тел, необходимо учесть и силы инерции, которые проявляются как свойство неинерциальной системы.

Итак, в уравнении (6) имеем:

$\vec{F} = m\vec{a}$ — сила, обусловленная взаимодействием тел (материальная сила);

$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$ — поступательная сила инерции;

$\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{\rho}$ — центробежная сила инерции;

$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{V}' \vec{\omega}]$ — сила Кориолиса.

Тогда основное уравнение динамики примет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор}. \quad (7)$$

Отметим еще раз, что силы инерции являются следствием свойств неинерциальных систем, т. е. от ее характера движения и ее кинематических параметров, и особенностей движения частицы в этой системе. В каждом конкретном случае движения K' -системы необходимо точное описание ее параметров.

3. Свойства сил инерции.

Перечислим основные особенности сил инерции, отличающих их от сил взаимодействия:

1) Силы инерции обусловлены свойствами самих неинерциальных систем, а не взаимодействием тел. Они существуют только в неинерциальных системах и не являются мерой взаимодействия тел.

2) На силы инерции не распространяется третий закон Ньютона.

3) Силы инерции приложены к центру масс тела.

4) Силы инерции являются внешними силами. В связи с этим в неинерциальных системах отсчета в общем случае не может быть замкнутых систем точек или тел.

5) Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в однородном поле сил инерции, как и в однородном поле тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

4. Примеры решения задач динамики в неинерциальных системах отсчета.

Пример № 1

Внутри ящика находится куб массой m и длиной ребра l , который опирается на три опоры. Определить силы, действующие на куб со стороны опор, если ящик движется с ускорением $\vec{a}$. Расстояние верхней опоры от нижней грани куба равно H .

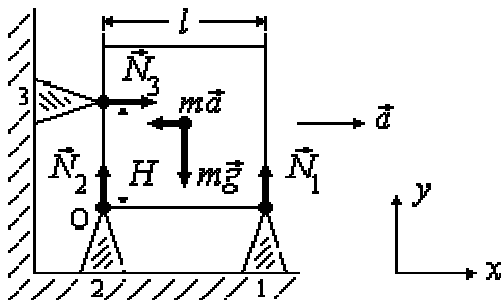


Рис. 1.

Решение. В системе отсчета, связанной с ящиком, куб покоится. В неинерциальной системе отсчета, связанной с ящиком, на куб действуют силы: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$ — силы реакции, $m\vec{g}$ — сила тяжести и $m\vec{a}$ — сила инерции. Условия покоя

ящика определяются равенством нулю всех сил, действующих на куб и равенством нулю моментов всех сил относительно любой оси, связанной с телом, т. е.

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} = 0,$$

$$\sum \vec{M}_i + \vec{M}_{ин} = 0.$$

Здесь $\vec{F}_{ин}$ — силы инерции, $\vec{F}_i$ — ньютоновские силы, $\vec{M}_i$ — момент ньютоновской силы, $\vec{M}_{ин}$ — момент силы инерции.

Выбрав оси координат, как указано на рис. 1, запишем эти условия:

$$y: N_1 + N_2 = mg, \quad (1)$$

$$x: ma = N_3. \quad (2)$$

Уравнение моментов относительно точки O :

$$mg\frac{l}{2} + N_3H = ma\frac{l}{2} + N_1l. \quad (3)$$

Подставив в (3) $N_3 = ma$, выразим N_1 :

$$N_1 = \frac{mgl + 2maH - mal}{2l} = \frac{m}{2} \left[g - a + \frac{2aH}{l} \right].$$

Подставив в (1), получим:

$$N_2 = mg - N_1 = \frac{m}{2} \left[g + a - \frac{2aH}{l} \right].$$

Ответ: $N_3 = ma$,

$$N_2 = mg - N_1 = \frac{m}{2} \left[g + a - \frac{2aH}{l} \right],$$

$$N_1 = \frac{m}{2} \left[g - a + \frac{2aH}{l} \right].$$

Пример № 2

Тело находится у основания абсолютно гладкого клина с углом $\alpha = 20^\circ$. Клин начинает двигаться с горизонтальным ускорением $a = 4 \text{ м/с}^2$. За какое время тело достигнет верхнего края клина. Длина наклонной грани 1 м.

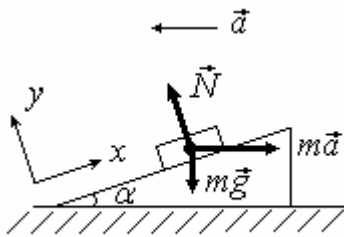


Рис. 2.

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с клином, на тело действуют силы $\vec{N}$ — нормальное давление, $m\vec{g}$ — сила тяжести и $m\vec{a}$ — сила инерции. Уравнение движения тела вдоль оси x будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = ma \cos \alpha - mg \sin \alpha ,$$

здесь $\ddot{x}$ — ускорение тела вдоль оси x .

Решаем:

$$\ddot{x} = a \cos \alpha - g \sin \alpha ,$$

$$\text{т. к. } v_0 = 0, \text{ то } l = \frac{\ddot{x} t^2}{2} \text{ или } t = \sqrt{\frac{2l}{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{2l}{a \cos \alpha - g \sin \alpha}}.$$

$$\text{Ответ: } t = \sqrt{\frac{2l}{a \cos \alpha - g \sin \alpha}} = 2,16 \text{ с.}$$

Пример № 3

На шероховатой доске на расстоянии l от ее правого конца находится сплошной цилиндр (рис. 3). Доску начинают двигать с ускорением a_0 влево. С какой скоростью относительно доски будет двигаться центр цилиндра в тот момент, когда он будет находиться над краем доски? Движение цилиндра относительно доски происходит без скольжения.

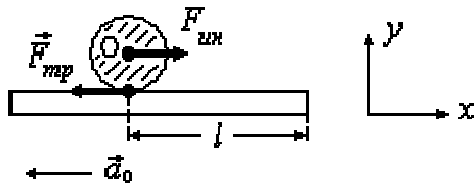


Рис. 3.

Решение. В неинерциальной системе координат, связанной с доской, уравнения поступательного и вращательного движения цилиндра имеет вид:

$$\begin{aligned} ma &= ma_0 - F_{tr}, \\ I_0 \beta &= F_{tr} r. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение моментов записано относительно центра цилиндра. Здесь a — ускорение цилиндра относительно доски, F_{tr} — сила трения, I_0 — момент инерции цилиндра, $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$, $F_{ин} = ma_0$. Т. к. проскальзывания нет, то $a = \beta r$. Из уравнений кинематики запишем $v^2 = 2al$ или $v = \sqrt{2al}$. Из системы (1) находим $a = \frac{2}{3}a_0$,

тогда $v = \sqrt{\frac{4}{3}a_0 l} = 2\sqrt{\frac{a_0 l}{3}}.$

Ответ: $v = 2\sqrt{\frac{a_0 l}{3}}.$

Пример № 4

Расстояние между ведущими и передними колесами у одного автомобиля L , а у второго $2L$. Центры тяжести находятся на одинаковой высоте. Мощности моторов и коэффициент трения скольжения между землей и ведущими колесами одинаковы. Какой автомобиль быстрее проедет путь $100L$?

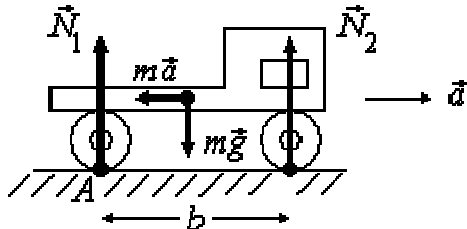


Рис. 4.

Решение. Полагаем, что коэффициент трения скольжения большой. В неинерциальной системе отсчета, связанной с автомобилем на него действуют силы: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $m\vec{g}$ и силы инерции $m\vec{a}$. Максимальное

ускорение, которое может получать автомобиль, будет определяться действием опрокидывания автомобиля, т. е. вращением относительно точки A . Это условие запишется:

$$mah = mg \frac{b}{2}.$$

Здесь h — положение центра масс относительно Земли, b — расстояние между колесами. Тогда

$$a_{\max} = g \frac{b}{2h}.$$

Отсюда следует, что чем больше расстояние b , тем больше максимальное ускорение, которое может получить автомобиль. При

$b = L$, $a_{\max} = g \frac{L}{2h}$; при $b = 2L$, $a_{\max} = g \frac{L}{h}$. Т. о., более

длинный автомобиль может развить большую скорость и быстрее пройти путь $100L$.

Пример № 5

Велосипедист едет по круглой горизонтальной площадке радиуса R . Коэффициент трения зависит только от расстояния r до центра O площадки как $k = k_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, где k_0 — постоянная. Найти радиус окружности с центром в точке O , по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью. Какова эта скорость?

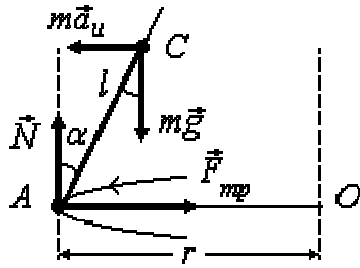


Рис. 5.

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с велосипедистом, на него действуют силы $\vec{N}$ — силы нормального давления, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_{mp}$ — сила трения и $m\vec{a}_u = \vec{F}_u$ — сила инерции.

Обозначим расстояние от точки опоры велосипедиста до центра масс $AC = l$. Обозначим угол наклона через α . Устойчивое положение велосипедиста определяется равенством нулю моментов сил инерции и силы тяжести относительно точки A, равенством нулю моментов сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{mp}$ относительно центра масс:

$$ma_u l \cos \alpha = mgl \sin \alpha,$$

$$Nl \sin \alpha = F_{mp} l \cos \alpha,$$

$$F_{mp} = kN,$$

$$a_u = \frac{v^2}{r}.$$

Решая систему, получаем $v^2 = kgr \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ или $v = \sqrt{kgr \left(1 - \frac{r}{R}\right)}$.

Находим условие, при котором v будет минимальным:

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r_{\max}} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{d}{dr} \left(r - \frac{r^2}{R} \right) \right|_{r_{\max}} = 0, \quad 1 - 2 \frac{r_{\max}}{R} = 0.$$

Отсюда находим максимальный радиус $r_{\max} = \frac{R}{2}$ и максимальную скорость $v_{\max} = \sqrt{k_0 g \frac{R}{2}}$.

Ответ: $r_{\max} = \frac{R}{2},$
 $v_{\max} = \sqrt{k_0 g \frac{R}{2}}.$

Пример № 6

На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 40\pi \text{ с}^{-1}$, около оси находится закрепленная неподвижно муфта массы $m = 100 \text{ г}$.

В некоторый момент муфту отпускают, и она скользит без трения вдоль стержня. Какой момент сил M должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Найти расстояние x муфты от оси в любой момент времени t . В начальный момент центр тяжести муфты находится на расстоянии $x_0 = 2 \text{ см}$ от оси.

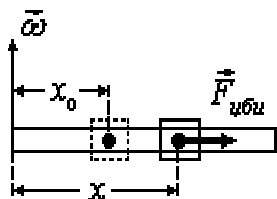


Рис. 6.

Решение. Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся стержнем. Уравнение движения стержня имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \omega^2 x. \quad (1)$$

Здесь $m \omega^2 x$ — центробежная сила инерции. Решение уравнения запишется как:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \quad (2)$$

Коэффициенты A и B находятся из начальных условий. В момент времени $t = 0$ смещение муфты равно x_0 , а скорость относительно стержня равна 0, т. е. при $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \frac{dx}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} x_0 &= A + B, \\ 0 &= A\omega - B\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда $A = B = \frac{x_0}{2}$. После подстановки в (2) получим

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t \quad (\text{т. к. } \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = \operatorname{ch} \omega t).$$

Момент импульса муфты относительно оси растет по мере удаления от оси, $L = m \omega x^2$. Это должно приводить к замедлению угловой скорости вращения стержня. Для компенсации изменения момента импульса необходимо приложить момент внешних сил

$$M = \frac{dL}{dt} \quad \text{или} \quad M = 2m \omega x \dot{x}.$$

Находим $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \operatorname{sh} \omega t$, тогда

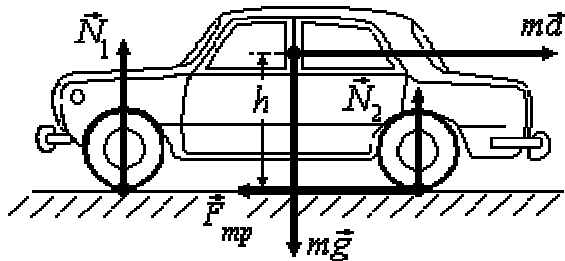
$$M = 2m\omega^2 x_0^2 \operatorname{ch} \omega t \operatorname{sh} \omega t = mx_0^2 \omega^2 \operatorname{sh} 2\omega t.$$

Ответ: $x = x_0 \operatorname{ch} \omega t = 2 \operatorname{ch}(40\pi) \text{ см},$

$$M = mx_0^2 \omega^2 \operatorname{sh} 2\omega t = 6,4 \cdot \operatorname{sh}(80\pi) \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Задачи для самостоятельного решения.

5.1. Какое максимальное ускорение может развить автомобиль с задней ведущей осью, если коэффициент сцепления (трения покоя)



колес с дорогой k , расстояние между осями автомобиля l , высота центра массы автомобиля над дорогой — h , и он расположен посередине колесной базы (рис. 7)?

Рис. 7.

Ответ: $a \leq \frac{kg}{2\left(1 - \frac{kh}{l}\right)}$ и $a \leq kg$.

5.2. Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения k между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом $R = 200 \text{ м}$ при скорости $v = 100 \text{ км/ч}$?

Ответ: $k = \frac{v^2}{Rg} \approx 0,4$.

5.3. Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиуса R . Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение $\vec{a}_0$, и тело начало скользить вниз. Найти скорость тела относительно шара в момент отрыва.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$.

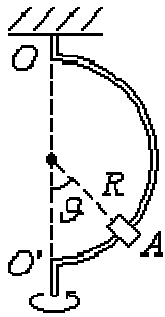


Рис. 8.

5.4. Муфточка A может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиуса R (рис. 8). Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO' . Найти угол ϑ , соответствующий устойчивому положению муфточки.

Ответ: Если $\omega^2 R > g$,

то $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$.

Если $\omega^2 R < g$, то $\vartheta_1 = 0$.

5.5. Автомобиль с шириной колеи $2b$ и высотой h центра массы над землей проходит горизонтальное закругление дороги радиуса R . 1)

Показать, что при скорости автомобиля $v > \sqrt{\frac{bRg}{h}}$ он опрокинется,

если не возникнет скольжения колес в направлении, перпендикулярном к движению автомобиля. 2) Предполагая, что скорость автомобиля достаточна для того, чтобы он мог опрокинуться, найти, при каком

минимальном значении коэффициента трения k между колесами автомобиля и покрытием дороги это может произойти?

Ответ: $k_{min} = \frac{b}{h}$; если $k < k_{min}$, то при $v = \sqrt{\frac{bRg}{h}}$

автомобиль соскользнет на закруглении.

5.6. Прямоугольная призма стоит на шероховатой доске, лежащей на горизонтальном столе (рис. 9). С каким минимальным ускорением a_{min} надо начать двигать доску

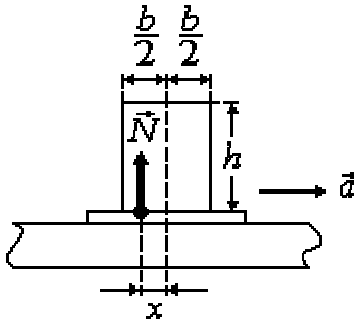


Рис. 9.

по столу, чтобы призма опрокинулась назад (по отношению к направлению движения доски) через свое нижнее заднее ребро? Найти силу нормального давления N и координату x ее точки приложения, с которой доска действует на призму при движении доски с ускорением a .

Провести решения задачи в системах отсчета, связанных с доской и со столом.

Ответ: $a_{min} = g \frac{b}{h}$, $N = mg$, $x = \frac{ah}{2g}$.

5.7. На горизонтальном вращающемся диске стоит цилиндр. При какой угловой скорости ω цилиндр свалится с диска, если расстояние между осями диска и цилиндра R , а коэффициент трения $k > \frac{D}{h}$, где D —

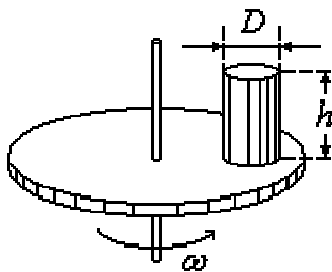


Рис.10.

диаметр цилиндра, а h — его высота (рис. 10).

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{Dg}{kh}}$.

5.8. Велосипедное колесо радиуса R вращается в горизонтальной плоскости вокруг своей оси. По спице колеса без трения может двигаться шарик. В начальный момент времени шарик находится у обода колеса. Какую начальную скорость v_0 следует сообщить шарiku в радиальном направлении, чтобы он мог достигнуть центра? Угловая скорость вращения ω поддерживается постоянной.

Ответ: $v_0 > \omega R$.

5.9. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса $R = 5 \text{ м}$, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10 \text{ с}$, скорость пули $v = 300 \text{ м/с}$. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

Ответ: $\alpha = \frac{4\pi R}{vT} \approx 0,0209 \text{ рад} = 1,2^\circ$.

5.10. Имеется горизонтально расположенное ружье, дуло которого совпадает с осью вертикального цилиндра (рис. 11). Цилиндр вращается с угловой скоростью ω .

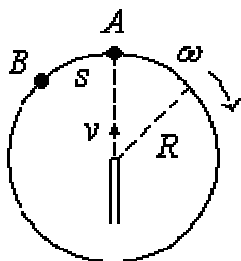


Рис.11.

а) Считая, что пуля, выпущенная из ружья, летит горизонтально с постоянной скоростью v , найти смещение s точки B цилиндра, в которую попадет пуля, относительно точки A , которая находится против дула в момент выстрела. Решить задачу двумя способами: в неподвижной системе отсчета и в системе отсчета, связанной с цилиндром.

б) Зависит ли результат от того, вращается ружье вместе с цилиндром или неподвижно?

Ответ: а) $S = \frac{\omega R^2}{\nu}$; б) не зависит

5.11. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью $\vec{\omega}$. По диску движется равномерно на неизменном расстоянии от оси вращения частица. Найти мгновенное значение:

а) скорости частицы $\vec{v}'$ относительно диска, при которой сила Кориолиса будет уравниваться центробежной силой инерции. Выразить $\vec{v}'$ через мгновенное значение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного к частице из центра диска;

б) скорости частицы $\vec{v}$ относительно неподвижной системы отсчета при тех же условиях.

Ответ: а) $\vec{v}' = \frac{1}{2} [\vec{r} \vec{\omega}]$; б) $\vec{v} = \frac{1}{2} [\vec{\omega} \vec{r}]$.

5.12. Горизонтально расположенный стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, с угловой скоростью $\omega = 1,00 \text{ рад/с}$. Расстояние от оси до другого конца стержня $l = 1,00 \text{ м}$. На стержень надета муфта массы $m = 0,100 \text{ кг}$. Муфта закреплена с помощью нити на расстоянии $l_0 = 0,100 \text{ м}$ от оси вращения. В момент $t = 0$ нить пережигают и муфта начинает скользить по стержню практически без трения. Найти:

- а) время τ , спустя которое муфта слетит со стержня;
- б) силу F , с которой стержень действует на муфту в момент τ ;
- в) работу A , которая совершается над муфтой за время τ в неподвижной системе отсчета.

Ответ: а) $\tau = \left(\frac{1}{\omega}\right) \ln \left[\frac{l}{l_0} + \sqrt{\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - 1} \right] \approx 3 \text{ с};$

б) $F = m \sqrt{4\omega^4(l^2 - l_0^2) + g^2} = 1 \text{ Н};$

в) $A = m\omega^2(l^2 - l_0^2) = 0,1 \text{ Дж}.$

5.13. Горизонтально расположенный диск вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Вдоль радиуса диска движется частица массы m , расстояние которой от центра диска изменяется со временем по закону $r = at$ (a — константа). Найти результирующий момент $\vec{N}$ сил, действующих на частицу в системе отсчета, связанной с диском. Имеется в виду момент относительно центра диска.

Ответ: $\vec{N} = -2ma^2t\vec{\omega}.$

5.14. Имеется система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы вокруг оси Z с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Из точки O , находящейся на оси Z , вылетает в перпендикулярном к оси направлении частица массы m и летит относительно инерциальной системы прямолинейно с постоянной скоростью v . Найти наблюдаемый во вращающейся системе отсчета момент импульса $\vec{M}(t)$ частицы относительно точки O . Показать, что возникновение $\vec{M}(t)$ обусловлено действием силы Кориолиса.

Ответ: $\vec{M}(t) = -mv^2t^2\vec{\omega}.$

5.15. Человек массы $m = 60 \text{ кг}$ идет равномерно по периферии горизонтальной круглой платформы радиуса $R = 3,0 \text{ м}$, которую вращают с угловой скоростью $\omega = 1,00 \text{ рад/с}$ вокруг вертикальной

оси, проходящей через ее центр. Найти горизонтальную составляющую силы, действующей на человека со стороны платформы, если результирующая сил инерции, приложенных к нему в системе отсчета "платформа", равна нулю.

Ответ: $\vec{F} = \frac{1}{4} m \omega^2 R = 45 \text{ Н}.$

6.1. Движение тел в неинерциальной системе, связанной с Землей. Примеры решения задач.

Пример № 1

Рассчитать величину поперечного смещения снаряда, выпущенного в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду полета. Выстрел произведен на широте $\varphi = 60^\circ$. Начальная скорость снаряда 500 м/с . В момент выстрела ствол орудия был направлен: а) на юг; б) на север. Соппротивление воздуха не учитывать.

Решение. В системе координат, связанной с Землей (Земля — неинерциальная система) основное уравнение динамики снаряда будет иметь вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{\rho} + 2m[\vec{v}' \vec{\omega}]. \quad (1)$$

Здесь $\vec{F}$ — сила взаимодействия снаряда с Землей, она направлена к центру Земли; $m\omega^2 \vec{\rho} = \vec{F}_{цб}$ — центробежная сила инерции, она направлена от оси вращения; $2m[\vec{v}' \vec{\omega}] = \vec{F}_к$ — сила Кориолиса.

На рис. 12 показано взаимное расположение векторов сил. Нас интересует только поперечное отклонение. Оно будет вызываться только силой Кориолиса $\vec{F}_к = 2m[\vec{v}' \vec{\omega}]$. В случае а) сила Кориолиса будет направлена на запад и в случае б) на восток. Выбрав в качестве

оси X прямую, перпендикулярную плоскости меридиана в точке выстрела, запишем уравнение движения снаряда в случае а) в виде проекции на ось X . В этом случае $F_x = 0$, $F_{\zeta\beta x} = 0$.

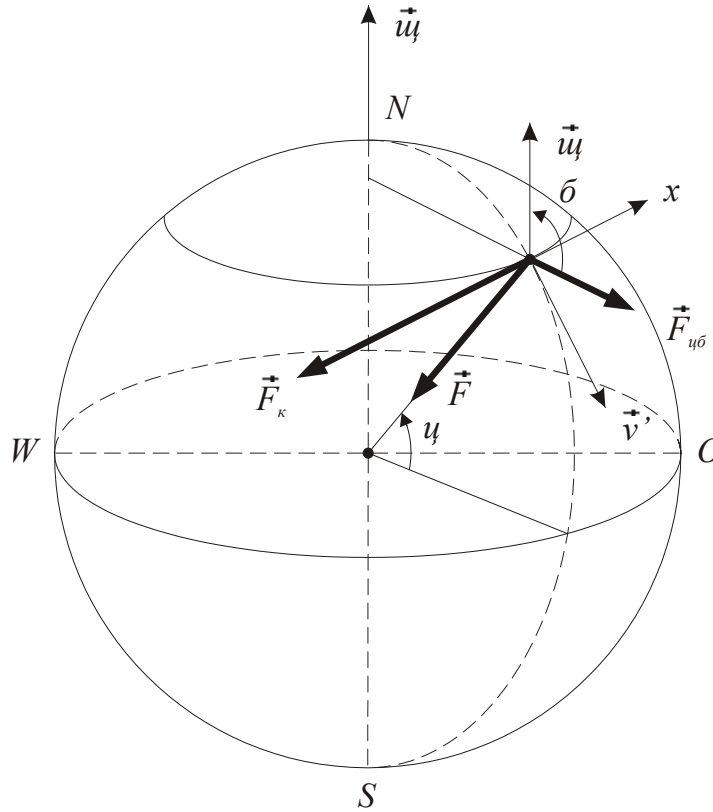


Рис. 12 (случай а).

Далее, приближенно полагаем, что в первую секунду $\vec{v}' \approx \text{const}$ ($\vec{v}'$ — скорость снаряда в момент выстрела, т. е. $\vec{a}_0 = 0$). Тогда уравнение движения снаряда примет вид:

$$ma_x' = 2mv'\omega \sin \alpha, \quad (2)$$

или
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2v'\omega \sin \alpha. \quad (3)$$

После двукратного интегрирования получим

$$x = v'\omega t^2 \sin \alpha. \quad (4)$$

Здесь $\vec{v}'$ — начальная скорость снаряда; α — угол между направлением $\vec{v}'$ и ω . Он равен широтному углу φ в случае б) и $\pi - \varphi$ в случае а).

Т. о., в случае а) снаряд будет отклоняться на запад: $x_1 = -v' \omega t^2 \sin \varphi$, в случае б) на восток: $x_2 = v' \omega t^2 \sin \varphi$, причем $|x_1| = |x_2|$.

Вычисление: $v' = 500 \text{ м/с}$, $t = 1 \text{ с}$, $\sin 60^\circ \approx 0,8660$,
 $\omega \approx 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}$.

$$|x_1| = |x_2| = 500 \cdot 0,73 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 0,866 \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

Ответ: $|x| = 3 \text{ см}$.

Пример № 2

Из ружья произведен выстрел строго вертикально вверх (т. е. параллельно линии отвеса на данной широте). Начальная скорость пули $v_{0y} = 100 \text{ м/с}$. Географическая широта местности $\varphi = 60^\circ$. Определить приблизительно, на каком расстоянии и в каком направлении от места выстрела упадет пуля на Землю.

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе Земли. При движении пули вверх сила Кориолиса будет направлена на запад. Выберем систему координат с осью y , направленную вверх и осью x , направленную на запад. Начало координат поместим в точку, откуда был сделан выстрел (т. A).

В высшей точке подъема (т. B) $v_y = 0$, но тангенциальная скорость $v_x' = v_{x'B}$. При этом вдоль оси x пуля сместилась на величину x_1 . Затем пуля начинает падать без начальной скорости v_y с ускорением $\vec{g}$, но при этом пуля имеет тангенциальную скорость v_{xB} .

При движении вниз сила Кориолиса будет направлена на восток, и ускорение Кориолиса будет отрицательно.

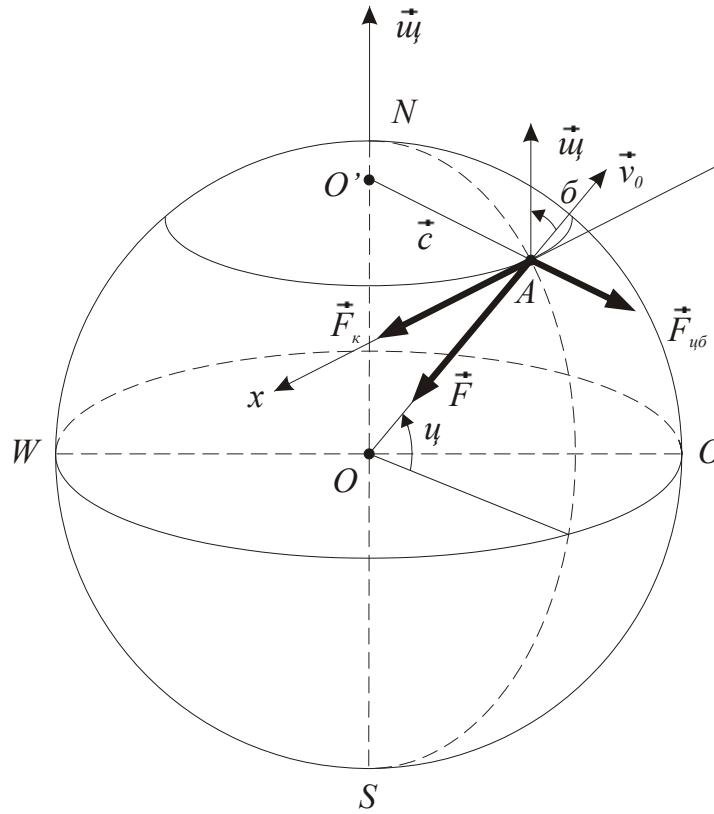


Рис. 13 а.

На рис. 13а показаны направления векторов $\vec{\omega}$, $\vec{v}_{0y}$, $\vec{F} = m\vec{g}$, $\vec{F}_{кор}$, $\vec{F}_{цб}$ в случае движения пули вверх. На рис. 13б показан вид траекторий движения пули для наблюдателя, находящегося в т. А.

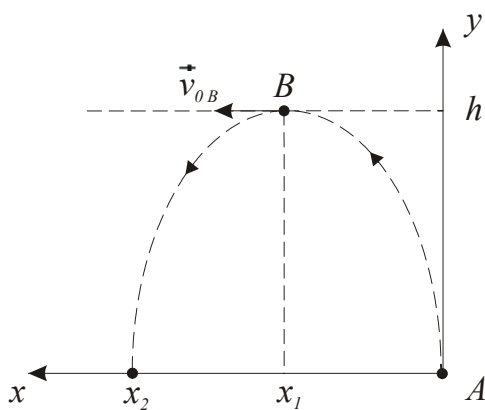


Рис. 13 б.

Уравнение движения пули в неинерциальной системе будет иметь вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{цб}.$$

Здесь $\vec{F} = m\vec{g}$ — сила взаимодействия с Землей,

$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}_y \vec{\omega}]$ — сила Кориолиса, она направлена на запад, вдоль положительного направления оси X ,

$\vec{F}_{цб} = -m\omega^2 \vec{\rho}$ — центробежная сила инерции, направленная перпендикулярно оси x ($F_{цб\ x} = 0$).

1) Уравнение движения вдоль оси Y при полете пули вверх.

$$ma_y = -mg, \text{ т. е. } a_y = -g \text{ (ось } y \text{ направлен вверх).}$$

Полагая $g = const$ получим выражение для скорости:

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

Полное время подъема находится из условия $v_y = 0$:

$$t_n = \frac{v_{0y}}{g}.$$

Т. к. вдоль оси y движение происходит с постоянным ускорением $\vec{g}$, то время подъема и падения будет одинаково.

2) Ускорение Кориолиса будет направлено вдоль оси X .

$$a_x = 2|\vec{v}_y||\vec{v}_0|\sin\alpha = 2(v_{0y} - gt)\omega \sin\alpha.$$

3) Находим v_x .

$$dv_x = a_x dt = 2(v_{0y} - gt)\omega \sin\alpha dt,$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = 2\omega \sin \alpha \int_0^t (v_{0y} - gt) dt,$$

$$v_x = 2\omega \sin \alpha \left(v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \right).$$

4) Находим x_1 .

$$dx_1 = v_x dt = 2\omega \sin \alpha \left(v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \right) dt,$$

$$\int_0^{x_1} dx_1 = 2\omega \sin \alpha \int_0^{t_n} \left(v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \right) dt,$$

или
$$x_1 = v_{0y} \omega \sin \alpha t_n^2 - \frac{1}{3} \omega g \sin \alpha t_n^3.$$

Подставив значение $t_n = \frac{v_0}{a}$, получим:

$$x_1 = \frac{v_{0y} \omega}{g^2} \sin \alpha - \frac{1}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \sin \alpha = \frac{2v_{0y}^3 \omega}{3g^2} \sin \alpha.$$

Т. о. при полете вверх пуля сместилась вдоль оси X на величину

$$x_1 = \frac{2v_{0y}^3 \omega}{3g^2} \sin \alpha.$$

5) Рассмотрим движение пули вниз.

Т. к. $a_y = -g$, $v_y = -gt$ (пуля начинает падать с нулевой скоростью вдоль оси y).

Сила Кориолиса:

$$\vec{F} = -2m[\vec{v}_y \vec{\omega}] = 2mt[\vec{g} \vec{\omega}]; F_x = -2mtg \omega \sin \alpha.$$

Ускорение Кориолиса: $a_x = -2g\omega t \sin \alpha$.

Скорость вдоль оси X :

$$dv_x = a_x dt,$$

или
$$dv_x = -2g\omega \sin \alpha \int_0^t t dt; \quad v_x - v_{0B} = -g\omega \sin \alpha t^2.$$

Т. о. $v_x = v_{0B} - g\omega t^2 \sin \alpha$.

Находим смещение:

$$dx = v_x dt,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_0^{t_n} v_x dt = \int_0^{t_n} (v_{0B} - g\omega t^2 \sin \alpha) dt,$$

$$x_2 - x_1 = v_{0B} t_n - \frac{1}{3} g\omega \sin \alpha t^3.$$

Подставив время падения $t_n = \frac{v_{0y}}{g}$, получим:

$$x_2 = x_1 + v_{0B} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \sin \alpha.$$

Скорость v_{0B} — скорость в точке B , находим из уравнения

$$\begin{aligned} v_{0B} &= 2\omega \sin \alpha \left[v_{0y} t_n - \frac{g t_n^2}{2} \right] = \\ &= 2\omega \sin \alpha \left[\frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} \right] = \frac{v_{0y}^2 \omega}{g} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Подставив значения x_1 и v_{0B} , получим:

$$x_2 = \frac{2}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \sin \alpha + \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \sin \alpha - \frac{1}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \sin \alpha =$$

$$= \frac{v_{0y}^3 \omega \sin \alpha}{g^2} \left[\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega \sin \alpha}{g^2} = \frac{4}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \cos \varphi,$$

т. к. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Ответ: Точка падения пули будет находиться к западу от точки выстрела. Величина смещения

$$x_1 = \frac{4}{3} \frac{v_{0y}^3 \omega}{g^2} \cos \varphi \approx 51 \text{ см}.$$

Пример № 3

На экваторе на рельсах стоит пушка. Рельсы направлены с запада на восток, и пушка может двигаться по ним без трения. Пушка стреляет вертикально вверх. Какую скорость v_0 будет иметь пушка после выстрела? Куда будет направлена эта скорость. Масса пушки M , масса снаряда m , длина ствола l . Считать, что снаряд движется в стволе с постоянным ускорением.

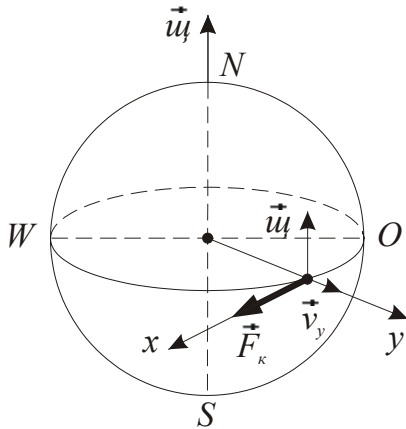


Рис. 14.

Решение. Выберем систему координат в точке выстрела. Ось y направим по вертикали, ось x в западном направлении. На снаряд, движущийся внутри ствола, действуют вдоль оси y силы тяжести, силы трения, силы давления пороховых газов, а вдоль оси x сила Кориолиса. В результате на систему снаряд-пушка вдоль оси x действует

только сила Кориолиса, т. к. сил трения нет.

Уравнения движения системы снаряд-пушка:

$$(M+m)a_x = 2m\omega v_y,$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$; $v_y = a_y t$ — скорость движения снаряда, a_y — его ускорение. Тогда уравнение движения системы будет иметь вид:

$$(M+m)\frac{dv_x}{dt} = 2m\omega a_y t.$$

Обозначим через v_{0x} скорость пушки в момент вылета снаряда:

$$\int_0^{v_{0x}} dv_x = \frac{2m\omega a_y}{M+m} \int_0^{t_0} t dt.$$

Здесь t_0 — время движения снаряда внутри пушки, оно равно

$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a_y}}$, т. к. вдоль ствола снаряд движется с постоянным ускорением.

После интегрирования получим:

$$v_{0x} = \frac{2m\omega a_y}{M+m} \frac{t^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{\frac{2l}{a_y}}},$$

после подстановки пределов получим:

$$v_{0x} = \frac{2m\omega l}{M+m}.$$

Ответ: Пушка после вылета снаряда начнет двигаться на запад со скоростью

$$v_{0x} = \frac{2m\omega l}{M+m}.$$

Пример № 4

На полюсе установлена пушка, ствол которой направлен горизонтально вдоль меридиана и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через замок орудия. С какой угловой скоростью относительно Земли будет вращаться ствол пушки после выстрела? Считать, что в начальный момент времени снаряд находится на оси вращения и движется внутри ствола при выстреле с постоянным ускорением a . Масса пушки ($M = 1000 \text{ кг}$) значительно больше массы снаряда ($m = 10 \text{ кг}$). Длина ствола значительно больше его диаметра.

Решение. В системе координат, связанной с Землей, на движущийся внутри ствола снаряд будет действовать сила Кориолиса, направленная на запад и равная $F = 2m\nu\omega_0$, где ν — мгновенная скорость снаряда, ω_0 — угловая скорость вращения Земли. Уравнение движения пушки со снарядом имеет вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_k.$$

Здесь $M_k = 2m\omega_0\nu r$ — момент силы Кориолиса, r — расстояние снаряда от оси вращения в данный момент времени. Т. к. масса пушки M значительно больше массы снаряда ($M \gg m$), то I приближенно равно моменту инерции пушки; ω — мгновенное

значение угловой скорости вращения ствола пушки. Полагая $v = at$, получим

$$I \int_0^{\omega} d\omega = m \omega_0 a^2 \int_0^{t_0} t^3 dt.$$

Здесь $t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}}$ — время движения снаряда внутри ствола,

$$I \approx \frac{1}{3} M l^2, \omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}.$$

После интегрирования получаем:

$$\omega = \frac{3m\omega_0}{M}.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{3m\omega_0}{M} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}.$$

6.2. Задачи для самостоятельного решения.

6.2.1. Артиллерийский снаряд движется с горизонтальной скоростью $v = 900 \text{ м/с}$ по настильной траектории (т.е. траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Снаряд должен поразить цель на расстоянии $L = 18 \text{ км}$. Географическая широта места $\varphi = 60^\circ \text{ с.ш.}$. Определить боковое отклонение l снаряда от цели, обусловленное вращением Земли. Зависит ли это отклонение от направления стрельбы? Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$\text{Ответ: } l = \frac{\Omega L^2 \sin \varphi}{v} = 23,6 \text{ м},$$

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.2. Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящейся точно в северном направлении, и выстрелили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, на сколько сантиметров и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте $\varphi = 60^\circ$, скорость пули $v = 900 \text{ м/с}$ и расстояние до мишени $s = 1,0 \text{ км}$.

Ответ:
$$h \approx \frac{\Omega s^2}{v} \sin \varphi \approx 7 \text{ см},$$

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.3. Представим себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу F , с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

Ответ:
$$F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P, \text{ здесь}$$

R — радиус Земли,

T — продолжительность земных суток,

P — вес тела на поверхности Земли.

6.2.4. Один из маятников Фуко установлен в Ленинграде в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98 \text{ м}$, линейная амплитуда колебаний шара маятника (т. е. наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5 \text{ м}$. Маятник отпускался из крайнего положения без начального толчка. Определить боковое отклонение шара маятника от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Ленинграда $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: $S = \frac{\Omega x_0}{\omega} \sin \varphi \approx 1 \text{ мм}$, здесь $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.5. Суточное вращение Земли приводит к отклонению артиллерийских снарядов и ружейных пуль от начального направления выстрела, заданного в горизонтальной плоскости по земным ориентирам. Рассчитать величину поперечного смещения x пули, выпущенной в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду ее полета. Выстрел произведен на широте Москвы ($55^\circ 45'$), начальная скорость пули 1000 м/с . Указать, в какую сторону отклонится пуля, если в момент выстрела ствол ружья был направлен на юг. Силу сопротивления воздуха полету пули не учитывать. Решить задачу в системе отсчета, связанной с Землей.

Ответ: $x = vt^2\Omega \sin \varphi \approx 5,8 \text{ см}$,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.6. Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой $\varphi = 30^\circ$, производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда $v = 500 \text{ м/с}$, угол вылета снаряда (т. е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта) $\alpha = 60^\circ$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приближенно отклонение y точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение: к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке).

Ответ: К югу, $y = \frac{4\Omega v_0^3 \sin \varphi \cos \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} \approx 71 \text{ м}$,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.7. На 60° *с.ш.* паровоз массой в 100 т идет с юга на север со скоростью $v = 72\text{ км/ч}$ по железнодорожному пути, проложенному по меридиану. Найти величину и направление той силы, с которой паровоз действует на рельсы в направлении, перпендикулярном к ходу поезда.

Ответ: $F = 2mv\Omega\sin\varphi = 253\text{ Н}$,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.8. На 60° *с.ш.* паровоз массой в 100 т идет с запада на восток со скоростью $v = 72\text{ км/ч}$ по железнодорожному пути, проложенному вдоль географической параллели данной местности. Найти величину и направление вертикальной и горизонтальной компонент кориолисовой силы, действующей на паровоз.

Ответ:

$$F_R = 2mv\Omega\cos\varphi = 146\text{ Н},$$

$$F_\tau = 2mv\Omega\sin\varphi = 253\text{ Н},$$

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.9. Пароход движется на восток вдоль параллели с географической широтой $\varphi = 60^\circ$. Скорость парохода $v = 10\text{ м/с}$. Определить вес тела P на пароходе, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0 .

Ответ: $P \approx P_0 \left(1 - 2 \frac{\Omega v}{g} \cos\varphi \right) \approx P_0 (1 - 7,5 \cdot 10^{-5})$,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.10. На экваторе на рельсах стоит пушка. Рельсы направлены с запада на восток, и пушка может двигаться по ним без трения. Пушка стреляет вертикально вверх. Какую скорость v_0 будет иметь пушка после выстрела? Куда будет направлена эта скорость? Масса пушки M , масса снаряда m , длина ствола l . Считать, что снаряд движется в стволе с постоянным ускорением a .

Ответ: Скорость направлена на запад, $v_0 = \frac{2ml\Omega}{M+m}$,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.11. На сколько будут отличаться конечные скорости разбега самолета, если самолет взлетает на экваторе, причем один раз его разбег производится с запада на восток, а второй раз с востока на запад? Подъемная сила, действующая на крылья самолета, пропорциональна квадрату его скорости относительно Земли. Необходимая конечная скорость разбега самолета вдоль меридиана равна v_0 .

Ответ: $\Delta v \approx 2\Omega \frac{v_0^2}{g}$, Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.12. Вращение Земли приводит к отклонению свободно падающих тел (без начальной скорости) от направления отвеса. В какую сторону направлено это отклонение и чему равна его величина? Провести решение задачи в системе отсчета, связанной с Землей.

Ответ:

$$\text{К востоку: } S_{\text{вост}} = \frac{1}{3}\Omega t^3 g \cos \varphi = \frac{2}{3}\Omega t h \cos \varphi;$$

$$\text{К экватору: } S_{\text{экв}} = \frac{1}{12}\Omega^2 t^4 g \sin 2\varphi = \frac{S_{\text{вост}}}{2} \Omega t \sin \varphi.$$

Здесь:

h — высота падения,

t — время падения,

φ — географическая широта,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.13. Под каким углом α к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Использовать данные предыдущей задачи.

Ответ: $\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \Omega}{g} \cos \varphi \approx 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 51''$.

Ствол ружья надо отклонить к востоку.

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.14. Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Рассчитать наклон поверхности воды в реке к горизонту на широте φ . Река течет с севера на юг.

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2v\Omega}{g} \sin \varphi$, здесь

v — скорость течения реки,

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.15. На широте $\varphi = 45^\circ$ из ружья, закрепленного горизонтально в плоскости меридиана, произведен выстрел по мишени, установленной на расстоянии $l = 100,0 \text{ м}$ от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью $v = 500 \text{ м/с}$, определить, на какое расстояние и в какую сторону отклонится пуля от центра мишени, если выстрел произведен в направлении: а) на север, б) на юг.

Ответ: $x = \frac{\Omega l^2 \sin \varphi}{v} = 1,03 \text{ мм},$

а) вправо;

б) влево (на запад).

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.16. Электровоз массы $m = 184 \cdot 10^3 \text{ кг}$ движется вдоль меридиана со скоростью $v = 20,0 \text{ м/с}$ (72 км/ч) на широте $\varphi = 45^\circ$. Определить горизонтальную составляющую F силы, с которой электровоз давит на рельсы.

Ответ: $F = 2mv\Omega \sin \varphi \approx 0,38 \cdot 10^3 \text{ Н},$

Ω — угловая скорость вращения Земли.

6.2.17. Небольшое тело падает без начальной скорости на Землю на экваторе с высоты $h = 10,0 \text{ м}$. В какую сторону и на какое расстояние x тело отклонится от вертикали за время падения τ ? Сопротивлением воздуха пренебречь. Сравнить найденное значение x с разностью Δs путей, которые пройдут вследствие вращения Земли за время τ точка, находящаяся на высоте h , и точка, находящаяся на земной поверхности.

Ответ: Тело отклонится к востоку,

$$x = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0,69 \text{ мм}, \quad \Delta s = \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{3}{2} x,$$

Ω — угловая скорость вращения Земли.

7. Принцип эквивалентности.

Аналогия между поведением тел в гравитационном поле и в неинерциальной системе отсчета представляют собой содержание

принципа эквивалентности (фундаментальный смысл этой аналогии выясняется в теории тяготения, основанной на общей теории относительности). Эйнштейн высказал предположение, что никакими физическими опытами невозможно отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции. На основе этого постулата был сформулирован принцип эквивалентности сил инерции и гравитации. Согласно этому принципу, все физические явления в однородном гравитационном поле протекают совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции. Еще раз подчеркнем, что этот принцип относится к однородным полям. Если поля неоднородны, что имеет место на самом деле, то этот принцип относится к небольшим объемам пространства, в которых поля можно считать однородными. В связи с этим говорят, что принцип эквивалентности имеет локальный характер. Поле, получающееся объединением гравитационного поля и поля сил инерции, сохраняет прежнее название — гравитационное. Напряженность результирующего гравитационного поля равна векторной сумме напряженности поля сил инерции и гравитационного поля, т. е.

$$\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} + \vec{a}. \quad (8)$$

Отметим, что наглядной физической основой теории тяготения является закон равенства инертной и гравитационной массы. Это, по сути, является следствием обобщения закона Галилея. Принцип эквивалентности связан с законом равенства гравитационной и инертной массы, но с ним не тождественен. Закон равенства инертной и гравитационной массы имеет общий, но не локальный характер, тогда как эквивалентность между полем сил инерции и полем тяготения имеет место только локально, т. е. относится только к одной точке пространства.

Применение принципа эквивалентности позволяет решать довольно большой круг задач, связанных с динамикой маятников, жидкостей и других систем в неинерциальных системах, заменив поле тяготения и поле сил инерции результирующим гравитационным полем. Удобство такого подхода заключается в том, что все основные математические формулы в результирующем поле имеют такой же вид, как и в поле тяготения. В приведенных задачах и их решениях демонстрируется применение принципа эквивалентности.

7.1. Примеры решения задач с использованием принципа эквивалентности.

Пример №1

Сосуд прямоугольной формы, доверху наполненный водой и плотно закрытый крышкой, движется в горизонтальном направлении с ускорением $\vec{a}$. Найти разность давлений на переднюю и заднюю боковые поверхности.

Решение.

1-й способ. Решим задачу в лабораторной системе отсчета.

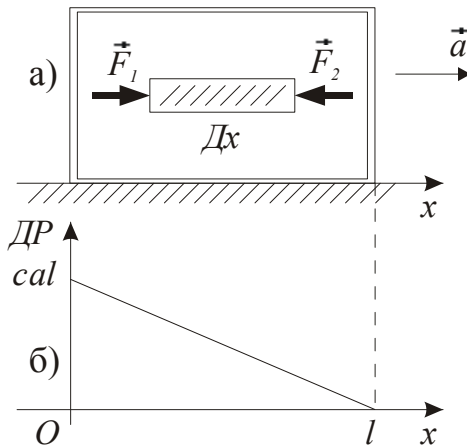


Рис. 15

Выберем систему координат, как указано на рисунке 15. Выделим столбик жидкости длиной Δx и сечением ΔS . На столбик действуют силы давления $\vec{F}_1$ — слева и $\vec{F}_2$ — справа.

Уравнение движения столбика имеет вид $F_1 - F_2 = \Delta m a$, а т. к. $\Delta m = \rho \Delta x \Delta S$, то $F_1 - F_2 = a \rho \Delta x \Delta S$. Поделив на ΔS , получим разность давлений:

$P_1 - P_2 = a \rho \Delta x$, или $P_1 = P_2 + a \rho \Delta x$. На рис. 15б показано распределение разности давлений по длине сосуда. Разность давлений на переднюю и заднюю стенки сосуда равна $\Delta P = \rho a l$.

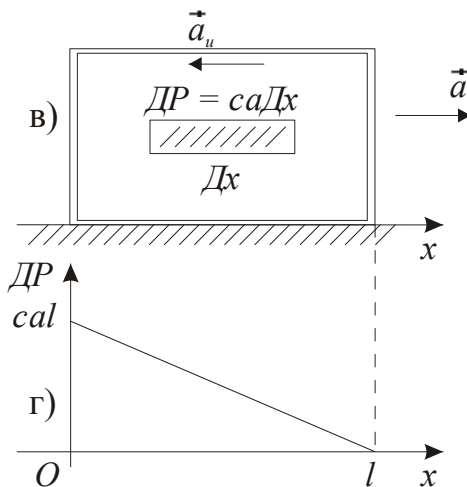


Рис. 15

2-й способ. Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета. Согласно принципу эквивалентности сил инерции и гравитации напряженность поля сил инерции

будет направлена противоположно движению (см. рис. 15в). Разность гидростатических давлений ΔP столба жидкости длиной x будет определяться так же, как и в гравитационном поле, т. е. $\Delta P = a\rho\Delta x$. Причем давление будет возрастать в направлении напряженности поля сил инерции (рис. 15г). На рис. 16 показано распределение гидростатического давления в покоем сосуде в поле сил тяжести для более наглядной иллюстрации принципа эквивалентности.

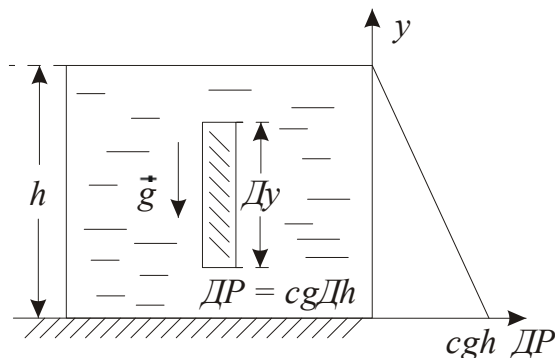


Рис. 16

Пример №2

В боковой стенке сосуда имеется отверстие, нижний край которого находится на высоте h . При каком горизонтальном ускорении a сосуда налитая в него жидкость не будет выливаться из отверстия, если в покоем сосуде (при закрытом отверстии) жидкость была налита до высоты H .

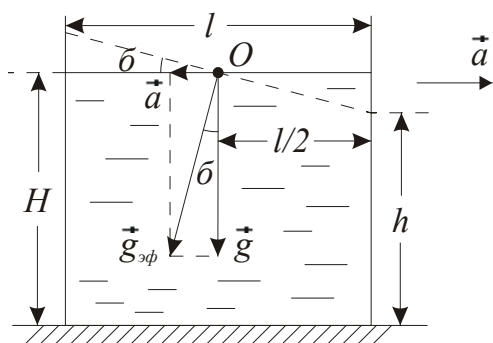


Рис. 17

Решение. Задачу решаем в системе отсчета, связанной с сосудом. Согласно принципу эквивалентности в этой системе действует результирующее поле тяготения $\vec{g}_{эф} = \vec{a} + \vec{g}$.

Поверхность жидкости устанавливается перпендикулярно $\vec{g}_{эф}$. Угол наклона жидкости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H-h}{\frac{1}{2}l} = \frac{2(H-h)}{l}.$$

С другой стороны, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$.

Отсюда получаем:

$$\frac{a}{g} = \frac{2(H-h)}{l}, \text{ или } a = \frac{2g(H-h)}{l}.$$

Ответ: Минимальное ускорение, с которым должен двигаться сосуд, для того, чтобы жидкость не выливалась из отверстия:

$$a_{\min} = \frac{2(H-h)}{l}.$$

Пример №3

Определить форму свободной поверхности жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Z в цилиндрическом сосуде.

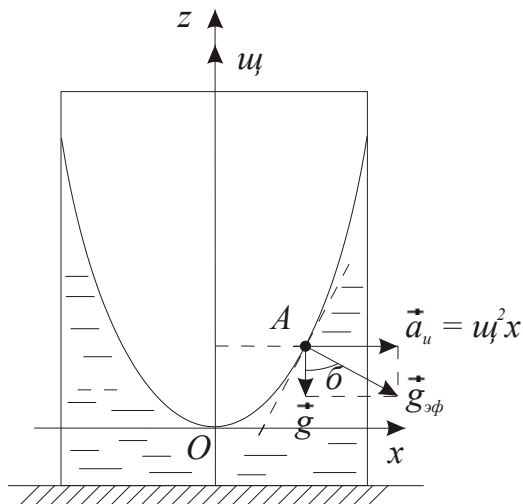


Рис. 18

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе, связанной с сосудом. Направление осей координат и начало координат указано на рис. 18. Согласно принципу эквивалентности, поверхность жидкости в окрестности координаты Z перпендикулярна $\vec{g}_{эф}$. Т. е. касательная в точке A перпендикулярна $\vec{g}_{эф}$. Если уравнение поверхности вращения

записать как $Z = Z(x)$, то по определению касательной $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$,

где α — угол между касательной в т. A и осью x .

С другой стороны, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_u}{g} = \frac{\omega^2 x}{g}$. Здесь $a_u = \omega^2 x$ — ускорение сил инерции.

Т. к. $\frac{dz}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$ или $dz = \frac{\omega^2}{g} x dx$, то после интегрирования:

$$z = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Ответ: Форма поверхности — параболоид вращения, $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2$.

Пример №4

На рельсах стоит цистерна сферической формы, заполненная жидкостью плотности ρ . Радиус цистерны R . Цистерна начинает двигаться с ускорением a . Найти гидростатическое давление в центре цистерны.

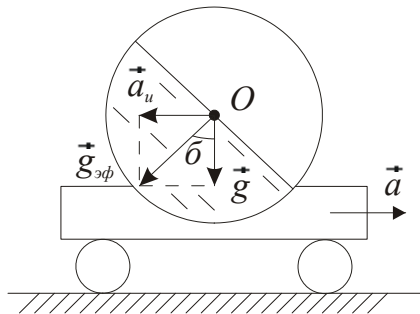


Рис. 19

Решение. Задачу решаем в неинерциальной системе, связанной с цистерной. Согласно принципу эквивалентности, результирующая напряженность поля тяготения в неинерциальной системе представляет собой векторную сумму напряженности поля сил тяжести $\vec{g}$ и поля сил инерции, т.е. :

$$\vec{g}_{эф} = \vec{a} + \vec{g} \quad \text{или} \quad g_{эф} = \sqrt{a^2 + g^2}.$$

В этом случае точка A будет высшей точкой, в которой гидростатическое давление будет равно нулю.

Гидростатическое давление в центре будет равно

$$P_O = \rho g_{эф} \cdot OA = \rho \sqrt{a^2 + g^2} \cdot R.$$

Ответ: $P_O = \rho \sqrt{a^2 + g^2} \cdot R.$

7.2. Задачи для самостоятельного решения.

7.2.1. 1) На тележке стоит стакан с водой. Тележка движется в горизонтальном направлении с ускорением $a = 0,5g$. Какой угол с горизонтом составляет поверхность воды?

2) На гладкий закрепленный клин с углом φ поставили стакан с водой. Какой угол с горизонтом будет составлять поверхность воды в стакане?

Ответ: 1) $\alpha = \arctg 0,5$; 2) $\alpha = \varphi$.

7.2.2. Цилиндрический замкнутый сосуд, наполненный водой, закрыт сверху пробкой.

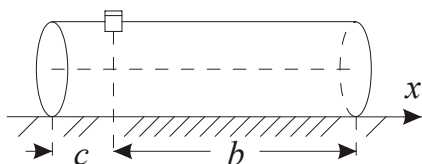


Рис. 20

Какое ускорение в горизонтальном направлении вдоль оси цилиндра нужно сообщить сосуду для того, чтобы пробка вылетела. Пробка выдерживает давление $0,05 \text{ атм}$, а расстояние отверстия от одного днища составляет $b = 1 \text{ м}$ и от другого $l = 0,1 \text{ м}$.

Ответ: 1) $a = 0,5g$; 2) $a = 5g$.

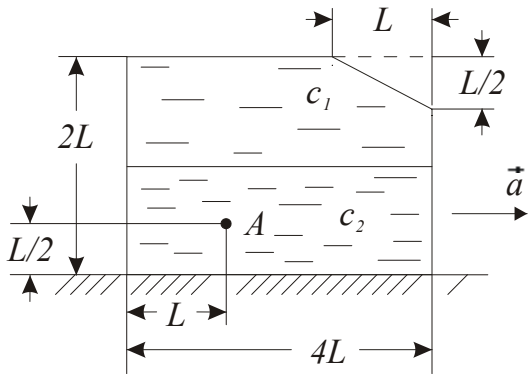


Рис. 21

7.2.3. Сосуд, имеющий форму, изображенную на рис. 21, наполнен до половины высоты ртутью, долит доверху водой и плотно закрыт. Определить давление в точке A , если сосуд движется горизонтально с ускорением a .

Ответ:

а) если $\frac{a}{g} < \frac{1}{2}$, $P_A = P_{атм} + \rho_1 g L + \rho_2 L \left(\frac{g}{2} + 2a \right)$;

б) если $\frac{a}{g} > \frac{1}{2}$, $P_A = P_{атм} + \frac{gL}{2} (\rho_1 + \rho_2) + \rho_2 a 3L$.

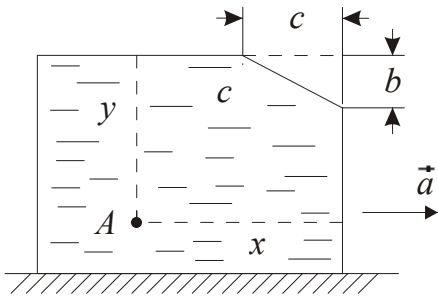


Рис. 22

7.2.4. Сосуд, имеющий форму, изображенную на рис. 22, доверху заполнен водой и плотно закрыт крышкой. Определить давление в точке A , когда сосуд движется с ускорением a . Рассмотреть все возможные случаи соотношений величин ускорений a и g : 1) $a > g$; 2) $a = g$; 3) $a < g$.

Ответ:

1) $P_A = \rho g(y-b) + \rho a x$;

2) $P_A = \rho g y + \rho a(x-c)$ либо $P_A = \rho g(y-b) + \rho a x$;

3) $P_A = \rho g y + \rho a(x-c)$.

7.2.5. Цистерна, наполненная жидкостью плотностью ρ , движется со скоростью v_0 . Затем цистерна тормозит, и, пройдя путь S , останавливается. Найти силы давления жидкости на переднюю и заднюю стенки цистерны во время торможения. Цистерну считать прямоугольным параллелепипедом длиной l , шириной b и высотой h .

Ответ:
$$P_{\text{п}} = \frac{\rho b h}{2} \left(g h + \frac{v_0^2 l}{S} \right), \quad P_{\text{з}} = \frac{\rho b h}{2} \left(g h - \frac{v_0^2 l}{S} \right).$$

7.2.6. Цилиндр, наполненный водой, закрыт со всех сторон. В нем находятся: пробка, кусочек свинца и некоторое тело A , плотность которого равна плотности воды. Цилиндр приводят в быстрое вращение вокруг его оси. Как будут расположены тела в цилиндре, если его ось вертикальна? Произвести необходимый расчет.

Ответ: пробка — у оси цилиндра вверху, свинец — у стенки цилиндра внизу, тело A — в любом положении.

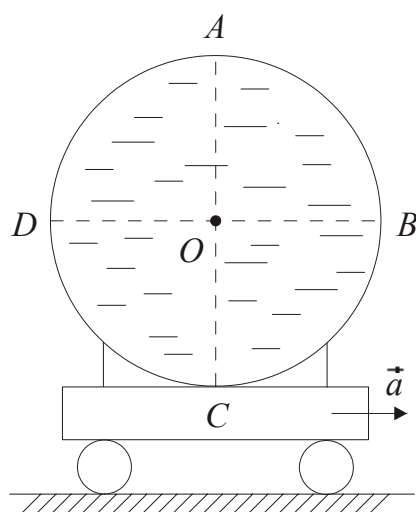


Рис. 23

4.2.7. Сферическая полость радиуса R (рис. 23) наполнена водой и плотно закрыта. Определить давление в центре полости, а также в крайних горизонтальных и вертикальных точках, когда сферу перемещают с ускорением a горизонтально.

Указание. При решении задачи использовать тот факт, что линии равного гидростатического давления перпендикулярны направлению эффективного гравитационного поля.

Ответ:

$$P_O = P_{атм} + \rho R \sqrt{a^2 + g^2};$$

$$P_B = P_{атм} + \rho R \left(\sqrt{a^2 + g^2} - a \right);$$

$$P_D = P_{атм} + \rho R \left(\sqrt{a^2 + g^2} + a \right);$$

$$P_C = P_{атм} + \rho R \left(\sqrt{a^2 + g^2} + g \right);$$

$$P_A = P_{атм} + \rho R \left(\sqrt{a^2 + g^2} - g \right).$$

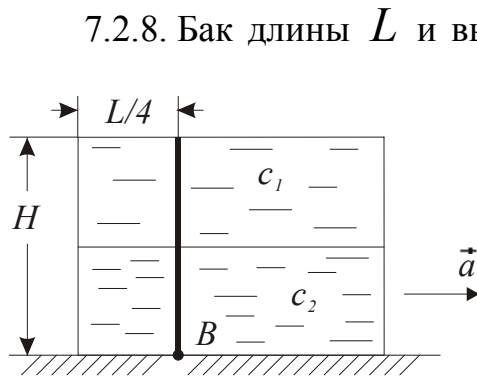


Рис. 24

7.2.8. Бак длины L и высотой H наполовину заполнен ртутью (ρ_2), долит доверху водой (ρ_1) и плотно закрыт. На расстоянии $\frac{L}{4}$ от левого конца бака подвешен тонкий медный стержень (ρ) длины H и массы M , нижний конец которого касается выступа B . Какая сила F_1 действует на выступ со стороны стержня, если бак движется вправо с ускорением a ? Какая сила F_2 действует на левую стенку бака, если ширина его равна L ? (рис. 24).

Ответ:

$$F_1 = \frac{3La}{16} (3\rho_2 + \rho_1 - 4\rho);$$

$$F_2 = \frac{LH}{8} [\rho_1 (gH + 4a) + \rho_2 (3gH + 4La)].$$

7.2.9. Горизонтально расположенная трубка AB длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через конец A . В трубке находится идеальная жидкость. Конец трубки A закрыт, а в закрытом конце B имеется очень малое отверстие. Найти, с какой скоростью относительно трубки будет вытекать жидкость в зависимости от "высоты" ее столба h .

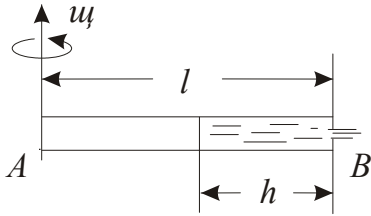


Рис. 25

Ответ: $v = \omega h \sqrt{\frac{2l}{h} - 1}$.

7.2.10. Вертикальный цилиндрический сосуд радиуса R , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда на нити длины l привязан воздушный шарик радиуса r , во время вращения нить образует со стенкой угол α . Найти угловую скорость вращения сосуда.

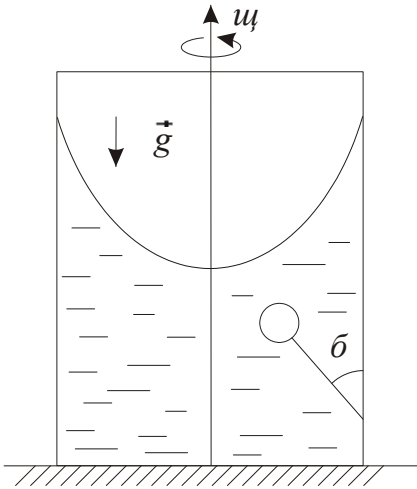


Рис. 26

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R - (l + r) \sin \alpha}}$.

7.2.11. Цилиндрический сосуд радиуса R , заполненный жидкостью плотности ρ , вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. В сосуде находится шарик радиуса r и плотности 2ρ . Найти силу, с которой шарик давит на боковую стенку сосуда.

Ответ: $F = \frac{4}{3} \pi r^3 (R - r) \rho \omega^2$.

8. Колебания в неинерциальных системах отсчета.

8.1. Примеры решения задач на малые колебания в неинерциальных системах отсчета.

Пример №1

Найти период колебаний маятника:

- а) в вагоне, движущемся с ускорением a ;
- б) в лифте, движущемся вверх с ускорением a ;
- в) в лифте, движущемся вниз с ускорением a ;
- г) в спутнике, вращающемся на орбите с постоянной угловой скоростью ω ;
- д) в космическом корабле, движущемся в межзвездном пространстве с ускорением a .

Решение.

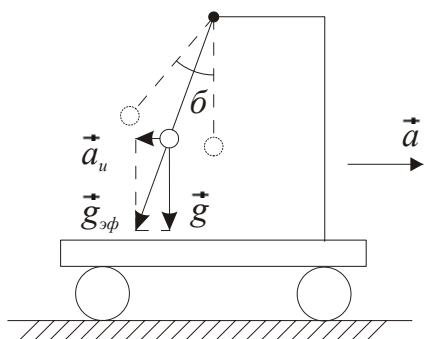


Рис. 27 а.

а) В системе координат будет действовать поле тяготения с напряженностью $\vec{g}_{эф} = \vec{a}_u + \vec{g}$ или

$g_{эф} = \sqrt{a^2 + g^2}$. Направление $\vec{g}_{эф}$ будет направлением линии отвеса (вертикального направления). Согласно принципу эквивалентности,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{эф}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}. \quad \text{В}$$

лабораторной системе координат маятник будет колебаться около направления, составляющего угол α с вертикалью.

б) При скорости лифта, направленной вверх, ускорение его может быть направлено вниз, в этом случае $g_{эф} = g - a$; либо вверх,

в этом случае $g_{эф} = g + a$. Соответственно периоды колебаний будут

$$\text{либо } T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}, \text{ либо } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

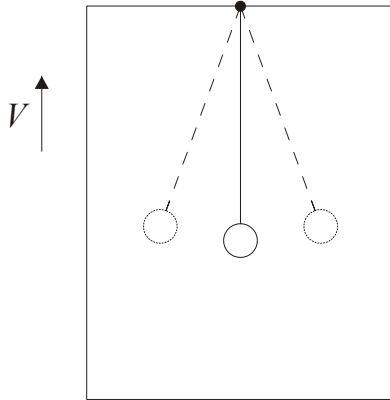


Рис. 27 б.

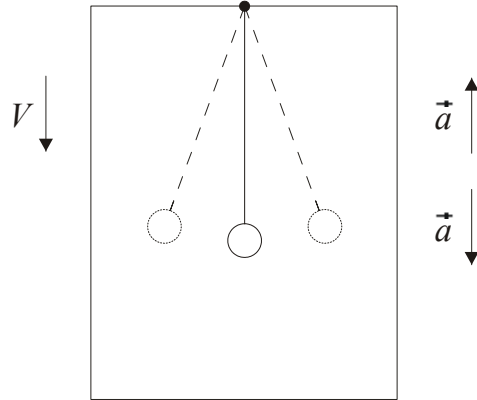


Рис. 27 в.

в) При движении лифта вниз ускорение его может быть направлено либо вниз, либо вверх, и период колебаний маятника, как и

в предыдущем случае, будет равен либо $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$, либо

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

Т. е. период колебаний зависит не от направления скорости, а от направления ускорения лифта. В частности, если $g = a$, т. е. лифт свободно падает, то $T = \infty$, маятник в свободно падающем лифте не будет совершать колебательных движений. В свободно падающем лифте, после сил тяготения $\vec{g}$ компенсируются полем сил инерции $\vec{a}_u = -\vec{g}$.

Рассмотреть случай $\vec{a}_u = -2\vec{g}$. Объяснить результат.

г) В спутнике, как неинерциальной системе, действует поле тяготения $\vec{g}_{эф} = \vec{a}_u + \vec{g}$. Здесь $\vec{g}$ — напряженность гравитационного

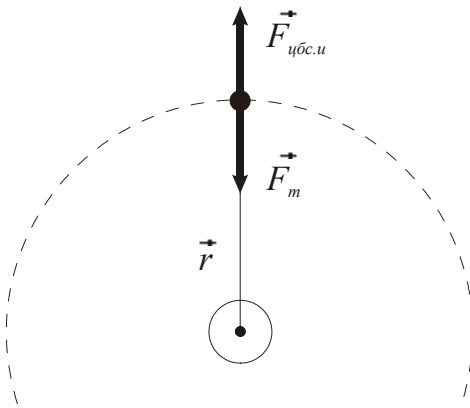


Рис. 27 г.

поля Земли, $\vec{a}_u$ — поле сил инерции.

Т. к. $\vec{g} = G \frac{M_3}{r^2}$, а $\vec{a}_u = \omega^2 r$, то

$$g_{эф} = G \frac{M_3}{r^2} - \omega^2 r.$$

Найдем a_u . Запишем уравнение движения спутника:

$$m\omega^2 r = G \frac{M_3 m}{r^2},$$

отсюда $\omega^2 r = G \frac{M_3}{r^2}.$

Т. о., внутри спутника $g_{эф} = 0$. Тогда период колебаний маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{эф}}} = \infty$. Маятник не будет совершать колебательных движений.

д) Этот случай рассмотреть самостоятельно.

Пример №2

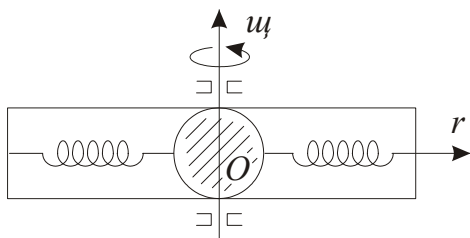
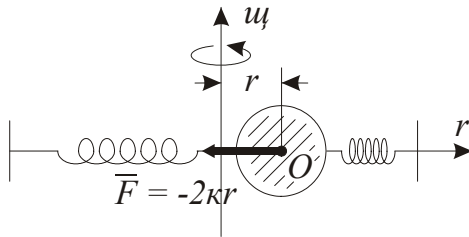


Рис. 28 а.

В абсолютно гладкой трубке на двух одинаковых пружинах жесткости K закреплен шарик массой m . Шарик колеблется с амплитудой A_0 . Трубку начинают медленно раскручивать. Определить зависимость периода и амплитуды колебаний шарика от угловой скорости вращения трубки $T(\omega)$ и $l(\omega)$. (рис. 28 а).

Решение. В отсутствии вращения уравнение движения шарика будет иметь вид (рис. 28 б)



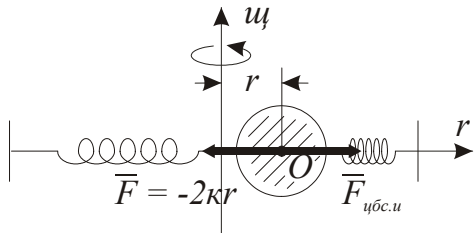
(т. к. две пружины, одна сжата на величину r , а другая растянута на величину r).

$$\ddot{r} + \frac{2\kappa}{m}r = 0$$

Рис. 28 б.

Здесь $\omega_0^2 = \frac{2\kappa}{m}$ и решение $r = A_0 \sin \omega_0 t$. Начальное условие $r = 0$ при $t = 0$.

При вращении трубки с угловой скоростью ω в неинерциальной системе отсчета, связанной с трубкой, уравнение движения примет вид



$m\ddot{r} = -2\kappa r + \omega^2 r m$. Здесь

$\omega^2 r = F_{\text{цбс.и}}$ — центробежная сила инерции. Тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{r} + \left(\frac{2\kappa}{m} - \omega^2 \right) r = 0.$$

Рис. 28 в.

Так как $\frac{2\kappa}{m} = \omega_0^2$, то $\ddot{r} + (\omega_0^2 - \omega^2)r = 0$.

Обозначив через $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \omega^2$, получим $\ddot{r} + \omega_1^2 r = 0$. Шарик будет колебаться с частотой $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$, а решение уравнения $r = A_1 \sin \omega_1 t$.

Находим период колебания:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = T_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

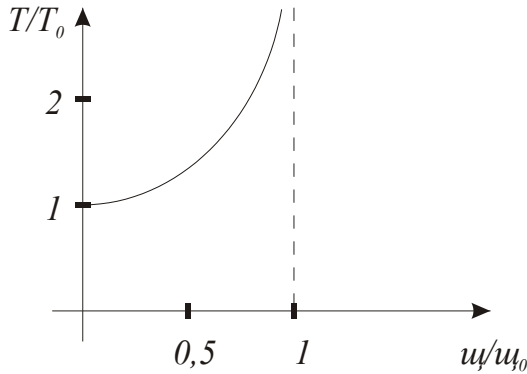


Рис. 28 г.

Отсюда следует, что $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$. Если $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$, то период колебания шарика будет равен бесконечности. При $\frac{\omega}{\omega_0} > 1$ колебаний не будет, шарик будет прижат к торцу трубки.

Находим зависимость амплитуды от частоты вращения. Для этого при каждой частоте вращения, в том числе и при отсутствии вращения, сообщаем грузику в положении равновесия одинаковую скорость, т. е. одинаковую начальную кинетическую энергию. Тогда:

а) при отсутствии вращения ($\omega = 0$) $E_k = \frac{\kappa l_0^2}{2}$, где l_0 — амплитуда колебаний при $\omega = 0$.

б) при частоте вращения $\omega \neq 0$ в закон сохранения энергии добавляется работа силы инерции: $E_k + A_{c.u} = \frac{\kappa l_1^2}{2}$, здесь l_1 — амплитуда колебаний при частоте ω . Найдем работу центробежной силы инерции:

$$dA_{c.u} = F_u dr = m\omega^2 r dr;$$

$$A_{c.u} = \int_0^{l_1} m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 l_1^2}{2}.$$

в) находим зависимость амплитуды от частоты:

$$\frac{\kappa l_0^2}{2} = \frac{\kappa l_1^2}{2} - \frac{m\omega^2 l_1^2}{2}, \text{ или } l_1 = \frac{l_0}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m}$ — частота собственных колебаний груза.

8.2. Задачи для самостоятельного решения.

8.2.1. Муфта массой m может скользить без трения по горизонтальной штанге (рис. 29). К муфте с обеих сторон прикреплены одинаковые невесомые пружины жесткостью κ . Штанга вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Муфту сдвигают от положения равновесия на величину l , а затем отпускают. Определить, как будет двигаться муфта.

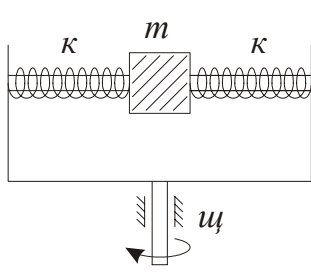


Рис. 29

Ответ:

1) При $\omega^2 < \frac{2\kappa}{m}$ уравнение движения имеет вид $x = l \cos \omega_0 t$,

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{m} - \omega^2}$;

2) При $\omega^2 = \frac{2\kappa}{m}$ — равновесие;

3) при $\omega^2 > \frac{2\kappa}{m}$, $x = l \operatorname{ch} \left[\sqrt{\omega^2 - \frac{2\kappa}{m}} \cdot t \right]$.

8.2.2. Шарик массы m , насаженный на стержень, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O , с которой он соединен пружиной

жесткости K . Определить частоту колебаний шарика вдоль пружины,

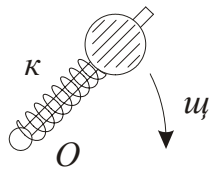


Рис. 30

если $\omega^2 < \frac{K}{m}$.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m} - \omega^2}$.

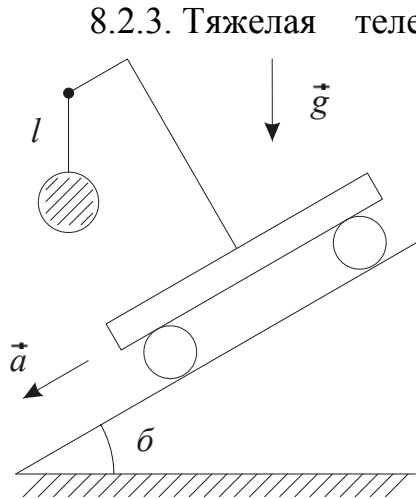


Рис. 31

8.2.3. Тяжелая тележка скатывается с ускорением a по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найти период колебаний маятника длины l , установленного по тележке.

Ответ:

$$T = 2\pi \left(\frac{l^2}{a^2 + g^2 - 2ag \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

8.2.3. Космический корабль вращается вокруг своей оси с угловой скоростью Ω . Как зависит период колебаний маятника длины l от расстояния R точки подвеса до оси вращения? Плоскость колебаний проходит через ось вращения.

Ответ: $T = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{l}{R+l}}$.

8.2.4. Найти период малых колебаний математического маятника длины l , если его точка подвеса движется относительно поверхности Земли с постоянным ускорением так, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{g}$ равен β .

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{|\vec{g} - \vec{a}|}}$, где $|\vec{g} - \vec{a}| = \sqrt{g^2 + a^2 - 2ga \cos \beta}$.

Список литературы.

1. С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, В. А. Угаров, И. А. Яковлев. Сборник задач по общему курсу физики. М., "Наука", 1977г.
2. И. Е. Иродов. Задачи по общей физике. М., "Наука". 1997г.
3. И. В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике. М., "Наука", 1982г.
4. В. Ф. Демёхин, А. П. Землянов, В. И. Махно, П. Ф. Тарасенко. Задачи по механике. УПП РГУ, Ростов-на-Дону, 1973г.
5. Д. В. Сивухин. Общий курс физики, т.1. М., "Наука", 1989г.
6. А. Н. Матвеев. Механика и теория относительности. М., "Высшая школа", 1986г.
7. И. В. Савельев. Курс общей физики, т.1. М., "Наука", 1971г.
8. И. Е. Иродов. Основные законы механики. М., "Высшая школа", 2001г.